

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Волоконовская средняя общеобразовательная школа № 1
Волоконовского района Белгородской области»

«Согласовано» Руководитель МО  Рыбалко К.А. Протокол № 7 от «26» июня 2014 г.	«Согласовано» Заместитель директора школы МБОУ «Волоконовская СОШ № 1»  Курганская Н.Н. «29» июня 2014 г.	«Утверждаю» Директор МБОУ «Волоконовская СОШ № 1»  Горюнова А.Г. Приказ № 324 от «30» августа 2014 г.
---	--	---

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по учебному курсу «Замечательные неравенства: способы получения и
примеры применения»

на уровень среднего общего образования

10 – 11 классы

Учителя математики : Рыбалко Клавдия Алексеевна

Лубенцова Елена Анатольевна

Базовый уровень

Волоконовка

2014

Пояснительная записка

Данная рабочая программа ориентирована на учащихся 10 – 11 классов и составлена на основе федерального компонента государственного стандарта среднего (полного) общего образования 2004 г, авторской программы кандидата физико – математических наук доцента С. А. Гомонова «Замечательные неравенства, их обоснование и применение».

Элективный курс «Замечательные неравенства, их обоснование и применение» рассчитан на 34 часа в 10- х классах и 68 часов в 11 – х классах. Запланированный данной программой для усвоения учащимися объем знаний необходим для овладения ими методами решения некоторых классов задач оптимизационного характера без применения средств дифференциального исчисления, а также (пусть и на интуитивном уровне) для ознакомления с некоторыми идеями такого раздела современной математики, как выпуклый анализ.

Целью данного курса является изучение избранных классов неравенств с переменными и научное обоснование (в той степени строгости, которая соответствует уровню школьной математики) методов их получения, а также выход на приложения изученного теоретического материала. Таковыми вначале будут решения примеров на установление истинности простейших числовых неравенств, встречающихся на вступительных экзаменах в вузы, а к завершению освоения курса - рассуждения, требующие уметь находить неравенства, помогающие справиться с данным конкретным заданием.

Данный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, намечает и использует целый ряд межпредметных связей (прежде всего с физикой). Традиционные *формы организации занятий*, как лекция и семинар, безусловно, будут применяться, но на первое место выйдут такие организационные формы, как дискуссия, диспут, выступления с докладами (в частности, с отчетными докладами по результатам написания рефератов или выполнения индивидуального домашнего задания) или с содокладами, дополняющими лекционные выступления учителя или ученика. Возможны и разные формы индивидуальной или групповой деятельности учащихся, как «Допишем учебник», отчетные доклады («Эврика, или Вот что мы нашли!») по результатам «поисковой» работы на страницах книг и журналов, включая (по возможности) зарубежные, и сайтов в Интернете, тем более что целый ряд разделов курса, безусловно, позволяет выделить темы для индивидуальной и коллективной исследовательской работы учащихся.

В рабочую программу внесены изменения:

В 10 и 11 классах тема «Числовые неравенства и их свойства» изучается после темы «Генераторы замечательных неравенств»;

В 10 классе на тему «Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для

произвольного числа переменных» отводится 6 ч, вместо 3 ч, за счёт часов темы «Генераторы замечательных неравенств»

Так как учащиеся 10 – 11 классов занимаются 34 недели в соответствии с приказом Департамента образования, культуры и молодежной политики Белгородской области от 12 мая 2011 г. №1339, то количества часов сокращено с 35 до 34 (за счет часов отводимых на тему «Применение неравенств»).

ТРЕБОВАНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ

В результате изучения математики на профильном уровне в старшей школе ученик должен

Знать/понимать

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике, для формирования и развития математической науки;
- идеи расширения числовых множеств как способа построения нового математического аппарата для решения практических задач и внутренних задач математики;
- значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности;
- различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально-экономических и гуманитарных науках, на практике;
- вероятностный характер различных процессов и закономерностей окружающего мира.

Уметь

- решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, иррациональные и тригонометрические неравенства, их системы;
- доказывать несложные неравенства;

- решать текстовые задачи с помощью составления неравенств, интерпретируя результат с учетом ограничений условия задачи;
- изображать на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.
- решать неравенства и системы с применением графических представлений, свойств функций, производной;

Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для

- построения и исследования простейших математических моделей.

Примерный тематический план изучения курса и распределения аудиторной нагрузки по темам

Глава	Тема	Учебное время, ч			
		Лекция		Семинар	
		10	11	10	11
	Часть I. Замечательные неравенства				
I	Числовые неравенства и их свойства	0,5	1	0,5	1
II	Основные методы установления истинности числовых неравенств, Или как узнать «Что больше?»	1	2	1	3
III	Основные методы установления истинности неравенств с переменными. Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение.	1	3	3	6
IV	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных.	2	3	1	2
V	Неравенство Коши – Буняковского и его применение к решению задач.	1	1	1	2
VI	Неравенства подсказывают методы их обоснования.	0	3	1	4
	Часть II. Средние величины и соотношения между ними				
VII	Средние степенные величины.	2,5	6	3,5	4
VIII	Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения.	1	2	1	1
IX	Генераторы замечательных неравенств.	7	8	4	11
X	Применение неравенств.	1	3	2	4
Всего:		17	32	18	38

10 класс: 35 ч

11 класс: 70 ч

Основное содержание курса

ЧАСТЬ I. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Введение. Предмет, изучению которого посвящен данный курс. Исторические сведения. Преемственная связь с базовым курсом школьной математики. Средние величины и неравенство Коши. О задачах школьных математических олимпиад.

Глава 1. Числовые неравенства и их свойства. Понятие положительного и отрицательного действительного числа, число нуль. Основные законы сложения и умножения действительных чисел. Свойства суммы и произведения положительных чисел. Понятие «больше» для действительных чисел, его геометрическая интерпретация и свойства. Понятия «меньше», «не больше» и «не меньше» для действительных чисел и их свойства. Числовые неравенства.

Тема для дискуссии: «Легко ли определить знак числа или найти наибольшее из двух данных чисел, если числа заданы как значения некоторых числовых выражений?».

Простейшие свойства числовых неравенств. Монотонность функций и числовые неравенства.

Задания для самостоятельной работы:

- а) Приведите примеры положительных и отрицательных действительных чисел.
- б) Вспомните символическую запись основных законов сложения и умножения действительных чисел.
- в) Попробуйте ответить, какими будут значения следующих числовых выражений (положительными, отрицательными числами или числом нуль):
 $(3)^{1000}$; $\sin 600^\circ$; $\sqrt[3]{3} - \sqrt[5]{5}$; $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5}$; $\sin(1001\pi - 1)$; $e^\pi - \pi^e$.
2. Выясните, какие из следующих утверждений истинны, а какие ложны:
 $2^{100} > 3^{50}$; $\operatorname{tg} 1000^\circ > 0$; $\sin(101\pi - 1) > 0$; $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 2$; $0 > \log_{\sqrt{3}-1} \sqrt{7}$.

Глава 2. Основные методы установления истинности числовых неравенств. Сравнение двух чисел — значений числовых выражений «по определению», путем сравнения их отношения с единицей, путем сравнения их степеней, путем сравнения их с промежуточными числами (числом), метод введения вспомогательной функции, метод использования «замечательных» неравенств и некоторые другие. Примеры.

Тема для дискуссии: «Можно ли использовать вычислительную технику (микрокалькулятор) для сравнения значений числовых выражений? Ожидания и заблуждения».

Задания для самостоятельной работы:

- 1) В журнале «Квант» (или «Математика в школе») (в номерах, вышедших за определенный период) найти и решить задачи на сравнение значений числовых выражений (акция «Допишем учебник»).
- 2) Решить цикл задач из раздела «Задачи для самостоятельного решения» (номера задач и их количество определит учитель).

Глава 3. Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными. Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применения. Краткое введение. О применении неравенств с параметрами и об умении подбирать, сочинять и обосновывать (а то и опровергать) неравенства с параметрами. Банк-хранилище замечательных неравенств наибольшей востребованности.

Неравенство-следствие. Равносильные (эквивалентные) неравенства. Равносильные задачи на доказательство (установление) или опровержение неравенств. Методы установления истинности неравенств с переменными: метод «от противного», метод анализа, метод синтеза, метод усиления и ослабления, метод подстановки (метод введения новых переменных), метод использования тождеств, метод введения вспомогательных функций, метод уменьшения или увеличения числа переменных, метод понижения степеней выражений, образующих левую или правую части неравенства, метод интерпретаций или моделей (векторных, тригонометрических, физических). Примеры.

Тема для дискуссии: «Самое лучшее из решений. За и против». (Одно и то же неравенство может быть установлено несколькими способами. Какой из способов лучше и почему? Каждый из участников «защищает» «свой» способ решения задачи, критикует другие решения.)

Задания для самостоятельной работы: разобрать (по указанной учителем литературе) один из вариантов обоснования конкретного неравенства с переменными и подготовить сообщение в защиту данного способа установления этого неравенства

Глава 4. Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных. Индукция вообще и в математике в частности. Система аксиом Дж. Пеано. Схема применения принципа (аксиомы) математической индукции. Некоторые модификации метода математической индукции. Примеры. Две теоремы о сравнении соответствующих членов двух последовательностей с помощью сравнения разности или отношения двух соседних членов одной последовательности с разностью или отношением двух членов другой последовательности. Примеры.

Задание для самостоятельной работы: доказать две вышеуказанные теоремы, используя метод математической индукции. Неравенство Коши для произвольного числа переменных. Исторический экскурс. Функциональное доказательство неравенства Коши. Примеры. Некоторые неравенства, эквивалентные неравенству Коши.

Тема для дискуссии и самостоятельной работы: «Какое из доказательств лучше и почему?». (Существуют десятки вариантов доказательства неравенства Коши, некоторые из них приведены в рекомендованной литературе; учащимся можно поручить разобрать самые яркие и интересные из них, чтобы потом провести дискуссию на указанную выше тему с учетом того, что «лучшее» можно понимать по-разному.) В разделе «Задачи для самостоятельного решения» данной главы содержится более 60 задач (есть и со «звездочкой»), что позволит учителю предложить индивидуальные домашние задания многим учащимся с последующей проверкой и оцениванием этих работ.

Глава 5. Неравенство Коши—Буняковского и его применение к решению задач. Формулируется и обосновывается теорема, устанавливающая соотношение Коши—Буняковского и дающая критерий реализации этого соотношения в варианте равенства. Примеры. Геометрическая интерпретация неравенства Коши—Буняковского. Векторный вариант записи этого неравенства.

Тема для обсуждения или дискуссии: «Как ввести понятие величины угла между векторами?».

Задания для самостоятельной работы:

- 1) Решить указанные учителем задачи из раздела «Задачи для самостоятельного решения».
- 2) Придумать и доказать теоремы, обобщающие утверждения задач из указанного выше раздела (можно в рамках коллективной работы «Допишем учебник»).

По желанию учителя уже в этой части освоения курса можно решить некоторые задачи прикладного характера из главы 9 «Применение неравенств для нахождения наибольших и наименьших значений функций», что повысит интерес учащихся к изучаемому курсу.

Глава 6. Неравенства подсказывают методы их обоснования.

- а) Метод Штурма. Примеры.
- б) Использование симметричности, однородности цикличности левой и правой частей неравенства.
- в) Геометрические неравенства, устанавливающие соотношения между длинами сторон треугольника.

Дополнительным разделом как источником тренировочных задач для развития навыков преобразования выражений является раздел «Условные тождества».

Тема для обсуждения или дискуссии: «Многообразие метода подстановки».

Задание для самостоятельной работы: решить указанные учителем задачи из статей соответствующей тематики журналов «Квант» или «Математика в школе».

Часть II. Средние величины: их свойства и применение

Введение. «Средние» в средней школе. Многообразие средних величин.

Глава 7. Средние степенные величины: соотношения между ними и другие источники замечательных неравенств.

Введение. Средние величины в школьном курсе математики, физики. Многообразие «средних».

а) Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое и соотношение между ними в случае двух параметров. Геометрическая интерпретация. Четыре средние линии трапеции.

Тема для обсуждения или дискуссии: «Сохранится ли соотношение между средними величинами (арифметическим, геометрическим, гармоническим и квадратическим), если позволить входящим в них параметрам принимать произвольные действительные значения?».

б) Среднее арифметико-геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое, их существование и свойства.

в) Симметрические средние. Теорема Мюрхеда. Круговые неравенства и методы их доказательства.

Задание для самостоятельной работы: изучить такие темы, как «Методы опровержения круговых неравенств», «Теорема Мюрхеда и ее применение».

г) Среднее арифметическое взвешенное и его свойства. Координаты центра масс конечной системы материальных точек.

д) Средние степенные и средние взвешенные степенные и их свойства. Примеры. Вывод неравенства Коши—Буняковского с помощью тождества Лагранжа.

Задания для самостоятельной работы:

1) Написать реферат на тему «Разные способы доказательства неравенства Коши—Буняковского». (Эта же тема может стать предметом обсуждения на уроке, проводимом в форме беседы, или стать основой для дискуссии.)

2) Решить цикл задач со «звездочкой» из завершающего главу раздела «Задачи для самостоятельного решения». (Помощь учителя, скорее всего, будет необходима, так как решения «звездных» задач представляют собой настоящие небольшие математические исследования. Найти решения этих задач — трудное индивидуальное задание на дом. Результаты такой работы могут быть доложены на уроке в виде доклада.)

3) Поручить нескольким учащимся (тем, кто математически послабее) подготовить выступления-содоклады к лекции учителя. Например, предложить учащимся подготовить для изложения на уроке доказательства некоторых свойств x -нормы.

Глава 8. Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения.

Введение. Исторический экскурс. П.Л.Чебышев и его научное наследие.

а) Неравенство Чебышева: простейший вариант и его обобщение, порожденное понятием одномонотонной последовательности. Одномонотонная последовательность как результат обобщения понятия монотонных последовательностей и обнаружения некоторой «симметричности» выражений, составляющих левую и правую части неравенства Чебышева.

б) Неравенства, обобщающие как неравенство Чебышева, так и неравенство Коши—Буняковского.

Задания для самостоятельной работы: написать реферат и подготовить доклад на тему «П.Л.Чебышев и его научное наследие».

Глава 9. Генераторы замечательных неравенств.

Перечисляются основные способы получения замечательных неравенств, причем как ранее уже изученные (идет повторение ранее пройденного), так и совершенно новые.

а) Свойства квадратичной функции — источник простейших неравенств.

Тема для обсуждения: «Три доказательства неравенства Коши—Буняковского. Сходства и различия».

б) Неравенство треугольника.

Тема для обсуждения или дискуссии: «Варианты введения понятия расстояния между двумя точками».

в) Свойства одномонотонных последовательностей — источник замечательных неравенств:

1) Свойства двучленных и трехчленных одномонотонных последовательностей. Примеры. Свертка двух последовательностей.

Задание на дом: по данному учебному пособию самостоятельно разобрать доказательства свойств двучленных и трехчленных одномонотонных последовательностей и отчитаться о выполнении этой работы перед учителем (в послеурочное время).

2) Свойства одномонотонных последовательностей произвольной длины и их применение. Примеры.

Задание для самостоятельной работы: используя материал данного пособия, самостоятельно разобрать доказательства свойств одномонотонных последовательностей и отчитаться в выполнении этой работы перед учителем (в послеурочное время).

3) Одномонотонность нескольких последовательностей, их свойства и применения. Примеры.

4) Обобщения. Итоги. Применения изученных понятий и их свойств к получению новых замечательных неравенств. Неравенства, обобщающие одновременно и неравенство Коши—Буняковского, и неравенство Чебышева.

Творческое задание для самостоятельной работы: исследовать предложенную математическую «проблему»: «Если в теореме о свойстве свертки нескольких одномонотонных последовательностей отказаться от требования положительности их членов, то сохранится ли теорема?»

(Подобные вопросы могут быть поставлены учителем перед учащимися и по поводу ряда других ранее рассмотренных теорем. Однако теоретический материал данной части главы весьма сложен и сформулированное выше задание можно предложить лишь самым упорным и любознательным ученикам. Возможно, учителю стоит существенно сократить изучение данной главы, отказавшись от проведения ряда громоздких доказательств.)

г) Неравенство Иенсона. Введение. Историческая справка. Краткий обзор результатов. Выпуклый анализ — раздел современной математики.

1) Свойства центра масс конечной системы материальных точек.

2) Выпуклые фигуры и выпуклые функции. Надграфик и подграфик функции. Неравенство Иенсона и его доказательство. Простейшие примеры применения.

Задание для самостоятельной работы: ответить на следующие вопросы из пособия:

Упражнение 1. Придумайте десять примеров выпуклых и десять примеров невыпуклых фигур.

Упражнение 2. Докажите, что пересечение нескольких выпуклых фигур есть выпуклая фигура. Верно ли, что объединение нескольких невыпуклых фигур есть фигура невыпуклая? Каков будет результат, если пересекать невыпуклые, а объединять выпуклые фигуры?

Упражнение 3. Выясните, является ли одноточечное множество выпуклой фигурой. Какая версия ответа наиболее предпочтительна? Теорема о связи свойств выпуклости надграфика или подграфика функции с ее выпуклостью или вогнутостью.

3) Выпуклость фигур и свойства центра масс конечной системы материальных точек.

Задание для самостоятельной работы: сформулировать и доказать неравенство Иенсона для случая выпуклости подграфика функции с использованием свойств координат центра масс конечной системы материальных точек. (Данное задание на дом может быть выполнено в виде стендового доклада.)

4) Исследование функций на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа. Неравенство Коши—Гельдера и неравенство Минковского.

Достаточные условия вогнутости и выпуклости функции, заданной на указанном промежутке, в терминах ее производных первого и второго порядка (две основные теоремы разной степени общности и «тонкости»).

Примеры (таблица) функций, чья выпуклость или вогнутость устанавливается вышеуказанными теоремами. Конкретные виды неравенства Иенсона, порожденные функциями из таблицы. Неравенство Коши—Гельдера. Неравенство Минковского и другие примеры.

Задание для самостоятельной работы: по указанной учителем литературе продолжить таблицу выпуклых (вогнутых) функций с

рассмотрением соответствующих этим функциям видов неравенства Йенсона (работа в рамках акции «Допишем учебник»).

Замечание. Теоретический материал данной главы достаточно труден для изучения учащимися, поэтому учитель вполне может ограничиться рассмотрением лишь части данного материала, опираясь на наглядность и очевидность соответствующих свойств графиков конкретных функций и записав именно для них неравенство Йенсона с конкретным количеством параметров и конкретными значениями весов. Например, он может это сделать для логарифмической функции с выходом на получение неравенства Коши.

Глава 10. Применение неравенств. Задача Дидоны (упрощенный вариант) и другие задачи на оптимизацию. Поиск наибольшего и наименьшего значений функции с помощью замечательных неравенств.

Темами для дискуссий и докладов (в том числе и стендовых) могут стать решения «знаменитых» задач на поиск наибольших и наименьших значений функций. С наиболее интересными сообщениями учащиеся могут выступить и на межшкольных и даже междугородных конференциях (типа Всероссийской научно-практической конференции одаренных школьников Интел-Авангард).

Перечень учебно-методических средств обучения

СТАТЬИ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» И ПРИЛОЖЕНИЙ К НЕМУ

Азевич А.М. Система подготовки к Единому государственному экзамену. — М., 2003. — № 4. — С. 32—36; 48—49.

Айзеништат Я. И. Доказательство неравенств методом математической индукции. — М., 1976. — № 2. — С. 89.

Аксенов А.А. Решение задач методом оценки. — М., 1999. — № 3. — С. 30—34.

Алексеев Р.Б., Курляндчик Л.Д. Неравенства и интеграл. — М., 1993. — № 2. — С. 53—56.

Алексеев Р.Б., Курляндчик Л.Д. Неравенства. — М., 1991. — № 4. — С. 49—53.

Алексеев Р.Б., Курляндчик Л.Д. Неравенства. — М., 1991. — № 3. — С. 44—46.

Алексеев Р.Б., Курляндчик Л.Д. Нетрадиционные способы доказательства традиционных неравенств. — М., 1991. — № 4. — С. 49—53.

Алозян М.Е. Одна имитационная система. — М., 1994. — № 3. — С. 54—57.

Алозян М.Е. Целые и дробные части чисел в примерах. — М., 1988. — № 5. — С. 41—42.

Антипов КН, Боковнев О.А. Выделение областей на координатной плоскости. — М., 2001. — № 5. — С. 50—55.

Балк М.Б. Применение производной к выяснению истинности неравенств. — М., 1975. — № 6. — С. 47—53.

Балк М.Б., Паравян Н.А. Неравенства Гюйгенса и их применение. — М., 1974. — № 2. — С. 70—74.

Балк М.Б., Пискарев Г.Ф. О некоторых приложениях понятия интеграла в школьном курсе математики. — М., 1977. — № 6. — С. 21—26.

Берколайко С. Т. Применение неравенства Коши к доказательству неравенства Непера. — М., 1978. — № 1. — С. 72—73.

СТАТЬИ ЖУРНАЛА «КВАНТ»

Алексеев Р., Курляндчик Л. Стороны треугольника. — М., 1993. — № 9—10. — С. 69—70; 94—95.

Алексеев Р., Курляндчик Л. Сумма минимумов и минимум суммы. — М., 1991. — № 3. — С. 49—51; 55.

Алексеев Р., Курляндчик Л. Тригонометрические подстановки. — М., 1995. — № 2. — С. 40—42; 58.

Балк М., Ломакин Ю. Доказательство неравенств с помощью производной. — М., 1979. — № 10. — С. 36—38.

Балк М., Мазалов М. Как же доказать это неравенство? — М., 1995. — № 6. — С. 43, 49, 62.

Болтянский В. Метод отделяющих констант. — М., 1977. — № 4. — С. 46—50; 60.

Баишмаков М. Геометрические неравенства. — М., 1970. — № 2.

Бендунидзе А. Начинаем с неравенства Евклида. — М., 1990. — № 12. — С. 34—35.

Берколайко С. Интеграл помогает доказать неравенство Коши. — М., 1979. — № 8. — С. 26.

Берколайко С. Т. Использование неравенства Коши при решении задач. — М., 1975. — № 4. — С. 37—40; 60.

Берколайко С.Т., Каток С.Б. Об одном индуктивном методе доказательства неравенств. — М., 1970. — № 8. — С. 33—36.

Бржозовский М.И. Уравнения орнаментов. — М., 1972. — № 7. — С. 14—19.

Бронштейн Е. Сюрпризы выпуклого мира. — М., 1996. — № 4. — С. 13—16.

Винокур Р. Дешевый ящик. — М., 1979. — № 5. — С. 21.

Власов А. Задачи на сравнение чисел. — М., 1986. — № 2. — С. 24—26.

СТАТЬИ В ЕЖЕНЕДЕЛЬНОМ ПРИЛОЖЕНИИ К ГАЗЕТЕ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

«Математика»

Антонова К, Солодовников С. Неравенство Коши о средних арифметическом и геометрическом. — М., 1999. — № 20. — С. 26—27.

- Баширин ГЛ.* Элементы финансовой математики. Часть вторая. — М., 1996. — № 16.— С. 1—24.
- Винокуровы Е. и Н.* Экономика в задачах. — М., 1998. — № 34.— С. 1—29.
- Галицкий М.* Задачи по алгебре. — М., 1998. — № 6. — С. 7—10.
- Кирзимов В.* Применение векторов к решению алгебраических и геометрических задач. — М., 2001. — № 32.— С. 13—15.
- Клостер Г.* Метод математической индукции. — М., 2003. — № 23.— С. 12—16.
- Метод математической индукции. Занятияпрактикумы, № 1—2. — М., 1994. — № 36.— С. 7.
- Метод математической индукции. — М., 1993. — № 9—10. — С. 8.
- Неравенства. — М., 1993. — № 9—10. — С. 2.
- Павлова О.* Свойства числовых неравенств. — М., 2002. — № 1. — С. 11—12.
- Смоляное А.* Применение тригонометрических подстановок в алгебре. — М., 1996. — № 25.— С. 14.
- Токарева Л.* Неравенства. — М., 1998. — № 15. — С. 2—4.
- Токарева Л.* Тригонометрические неравенства. Приемы доказательств. — М., 2002. — №№ 44, 47. — С. 22—26; С. 23—26.
- Чистяков Н.* Неравенства Коши о средних арифметическом и геометрическом. — М., 2000. — № 8. — С. 29—30.